

S-JTSK A ETRS89 ODHAD TRANSFORMAČNÝCH PARAMETROV METÓDOU TRANSFORMÁCIE NA POVRCHU ELIPSOIDU STOTOŽNENÍM NORMÁL

Matej Klobušiak, Katarína Leitmannová, Dušan Ferianc¹

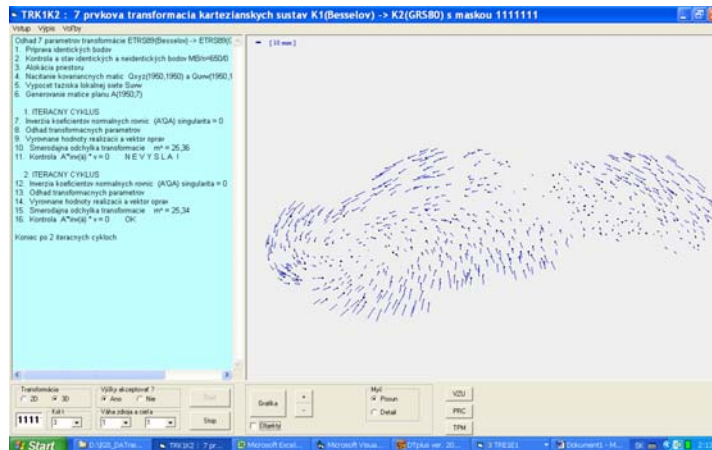
S-JTSK and ETRS89 Transformation Parameters Estimation by the Method of Normals Coincidence on the Elipsoid Surface

Abstract. Description of the transformation method of the conventional national coordinate system JTSK into ETRS89, its advantages and disadvantages. New realisation of the coordinates in the national coordinate system. Estimation of the 7 transformation parameters between this new realisation JTSK/03 and ETRS89.

1. Úvod

Cieľom tohto príspevku je popísať postup metódy transformácie zoznamu súradníc JTSK do európskeho terestrického súradnicového systému ETRS89 prostredníctvom skupiny identických bodov Štátnej priestorovej siete s rešpektovaním nekonzistentnosti budovania národného súradnicového a výškového systému JTSK a Bpv. Zvolená bola metóda stotožnenia normál vedených ťažiskami zdrojovej a cieľovej množiny bodov. Ďalej uvedený postup je prirodzeným pokračovaním prác [1], [5]. Cieľom tu uvedenej metódy bolo eliminovať zvyškové systematické vplyvy veľkosti až 4 cm, ktoré sa prejavili pri výpočte 7 parametrov podobnostnej transformácie Burša-Wolfovým modelom (ďalej BWM) medzi súradnicami JTSK/03 [5] a ETRS89. Metóda uvedená v [5] vychádzala z predpokladu, že referenčné elipsoidy zdroja aj cieľa sú geocentrické so zachovanými základnými smermi referenčného elipsoidu GRS80. Ako sa neskôr ukázalo, táto metóda pre územie Slovenska generovala systematické chyby. Pozri obrázok Obr. 1. Na eliminovanie nedostatku prevodu súradníc JTSK/03 z Besselovho elipsoidu na elipsoid GRS80 sme použili metódu stotožnenia normál vedených ťažiskami množín identických bodov s využitím výhodných vlastností lokálneho horizontálneho súradnicového systému (ďalej Lh). Následnou analýzou sa ukázalo, že spomenutá metóda je dobré riešenie.

¹ Ing. Matej Klobušiak, PhD., e-mail: klobusiak@gku.sk, Ing. Katarína Leitmannová, e-mail: leitmannova@gku.sk, Ing. Dušan Ferianc, e-mail: ferianc@gku.sk, Geodetický a kartografický ústav Bratislava, Chlumeckého 4, 827 45 Bratislava, tel.: ++421-2-43334822,



Obr. 1 Reziduá veľkosti 0 – 4 cm po transformácii JTSK/03 do ETRS89 metódou TrK1K2

2.

3. Stratégia postupu

Na vyjadrenie vzťahu medzi súradnicami S-JTSK a ETRS89 je potrebné vykonať nasledujúcu postupnosť výpočtov :

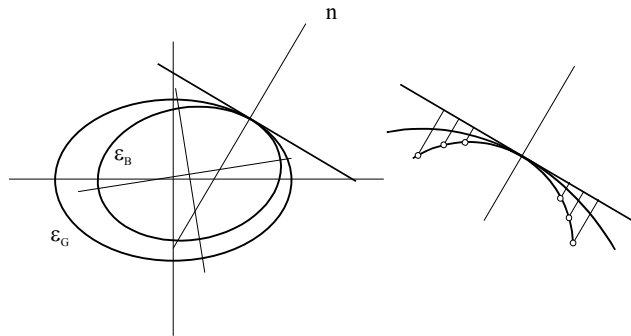
- previesť súradnice x, y JTSK z Besselovho referenčného elipsoidu na povrch cieľového referenčného elipsoidu GRS80 metódou stotožnenia normál Lh,
- vypočítať efektívny odhad 4 parametrov (tB, tL, k, α) podobnostnej transformácie vykonanej na povrchu cieľového elipsoidu GRS80,
- inverznou transformáciou previesť body z ETRS89 na povrch Besselovho elipsoidu, tým sme získali realizáciu súradníc JTSK/03, vykonali sme najlepšie umiestnenie nezdeformovanej množiny bodov určenej technológiou GNSS na Besselovom elipsoide,
- vytvoriť digitálne modely reziduálnych zložiek $DMRZ-JTSK_B$ a $DMRZ-JTSK_L$,
- vypočítať efektívny odhad 7 parametrov ($tX, tY, tZ, k, uX, uY, uZ$) podobnostnej transformácie Burša – Wolfovým modelom (BWM) medzi realizáciou JTSK/03 a ETRS89. Tieto parametre budú cieľom distribúcie koncovým používateľom pre geodetické a negeodetické aplikácie, lebo všetky existujúce geodetické, ale aj rovnako GIS spracovateľské softvéry vedia pracovať s parametrami BWM.

4. Popis problému a jeho riešenie

Súradnicový systém JTSK je definovaný na Besselovom referenčnom elipsoide ε_B , ktorý nie je geocentrický. Na ňom poznáme geodetické súradnice bodov Štátnej priestorovej a trigonometrickej siete $P_{B,i} [B, L, H], i = 1, 2, \dots, n$.

Súradnicový systém ETRS89 je definovaný referenčným geocentrickým elipsoidom ε_G GRS80. Na ňom poznáme súradnice vybraných bodov geodetických základov $P_{G,i} [B, L, H]$, kde $i = 1, 2, \dots, n$.

Zavedme si pre model priamej transformácie JTSK na ETRS89 cez povrch cieľového elipsoidu metódu prechodu cez lokálny karteziánsky horizontálny súradnicový systém (ďalej Lh) stotožnením normál vedených ťažiskami zdrojovej a cieľovej sústavy. Inšpirácia tu popisovanej metódy vznikla čítaním prameňa [6]. Postupnosť prevodu je zrejماً z grafickej interpretácie na obrázku Obr. 2.



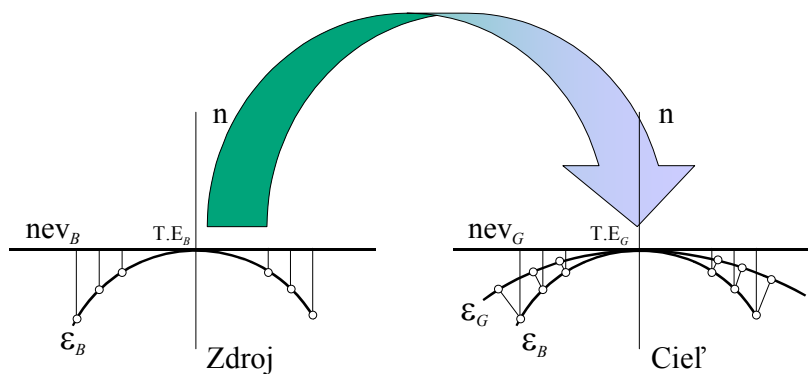
Obr. 2 Vzájomná poloha zdrojového a cieľového referenčného elipsoidu s totožnou normálou a vzťah lokálnych horizontálnych súradnicových systémov

Na transformáciu bodu uplatníme nasledujúci postup 14-tich krokov :

1. $P.Z \rightarrow P.K_B$ prepočítajme 2D súradnice súradnicového systému JTSK vedené v Křovákovom zobrazení (ďalej Z) na 3D karteziánske, kde platí $P \in \{ P_1, P_2, P_3, \dots, P_n \}$,
2. $P.K_B \rightarrow P.E_B$ prevedme 3D karteziánske súradnice K_B so stredom v referenčnom elipsoide ϵ_B (Bessel) na geodetické (elipsoidické) E_B ,
3. $P.E_B^\circ \rightarrow P.K_B^\circ$ prepočítajme priestorové body P na povrch referenčného elipsoidu ($P.H=0$) a vypočítajme nové karteziánske súradnice K_B° ,
4. $T.E_B^\circ \rightarrow T.K_B^\circ$ vypočítajme ťažisko T zdrojovej množiny bodov na referenčnom Besselovom elipsoide a prepočítajme jeho geodetické súradnice na 3D karteziánske,
5. $P.LK_B^\circ = P.K_B^\circ - T.K_B^\circ$ vypočítajme lokálne karteziánske súradnice s počiatkom lokálneho systému v ťažisku zdrojovej sústavy T . Ťažisko $T.K_B^\circ$ leží na povrchu elipsoidu ϵ_B ,
6. $R(T.E_B^\circ)$ vygenerujme rotačnú maticu, ktorá transformuje lokálny karteziánsky súradnicový systém na lokálny horizontálny s dotykovým bodom v ťažisku $T.E_B^\circ$,
7. $P.Lh_B^\circ = R(T.E_B^\circ) * P.LK_B^\circ$ transformujme postupne body v lokálnom karteziánskom súradnicovom systéme do lokálneho horizontálneho súradnicového systému so stredom v bode T ,
8. $T.B_G^\circ = T.B_B^\circ + tB$; $T.L_G^\circ = T.L_B^\circ + tL$ vypočítajme ťažisko cieľovej sústavy po transformácii, kde tB a tL sú známe translačné parametre vyjadrujúce posun počiatku zdrojovej sústavy po povrchu cieľového elipsoidu GRS80 o príslušnú uhlovú hodnotu tB a tL ,

9. $T.E_G \rightarrow T.K_G$ vypočítajme karteziánske súradnice ťažiska cieľovej sústavy ležiaceho na povrchu príslušného referenčného elipsoidu ϵ_G ,
10. $R^{-1}(T.E_G)$ vygenerujme inverziu rotačnej matice transformujúcej lokálny horizontálny súradnicový systém na lokálny karteziánsky s počiatkom v dotykovom bode $T.E_G$, pre inverziu rotačnej matice vzhľadom na jej ortogonalitu platí $R^{-1}(\cdot) = R(\cdot)$,
11. $A(\alpha)$ vygenerujme rotačnú maticu otáčajúcu lokálny horizontálny systém okolo normály o uhol α ,
12. $P.LK_G = M * R^{-1}(T.E_G) * A(\alpha) * P.Lh_B$ transformujme body P lokálneho horizontálneho súradnicového systému zdrojovej sústavy na lokálny karteziánsky s počiatkom ležiacim v bode $T.E_G$, kde $K = (1 + k)$ je mierka transformácie, k je mierkový faktor,
13. $P.K_G = P.K_G + T.LK_G$ vypočítajme geocentrické karteziánske súradnice s počiatkom v strede referenčného cieľového elipsoidu ϵ_G ,
14. $P.K_G \rightarrow P.E_G \Rightarrow P.E_G$ vypočítajme geodetické súradnice bodu ležiaceho nad povrchom referenčného elipsoidu cieľovej sústavy s rešpektovaním elipsoidickej výšky H_G vzťahnutej k referenčnému elipsoidu ϵ_G ,
15. $P.E_G \rightarrow P.K_G$ vypočítajme karteziánske elipsoidocentrické súradnice so stredom v cieľovom referenčnom elipsoide ϵ_G .

Grafická interpretácia postupu je uvedená na dole uvedenom obrázku,



Obr. 3. Prevod bodov z povrchu zdrojového elipsoidu na cieľový prostredníctvom lokálnych horizontálnych systémov

kde postupne znamená :

- $P.Z_i, P.K_i, P.E_i$ je symbolické kvalifikované označenie bodu $P \in \{ P_1, P_2, P_3, \dots, P_n \}$, ktorých vektor súradníc je vyjadrený v : Z - zobrazenie s definovanou kartografickou projekciou, K – 3D karteziánsky súradnicový systém, E_i – elipsoidický súradnicový systém s referenčným elipsoidom ε_i ,
- $Z_i = (x, y, h)'$ je vektor zložený z 2D karteziánskych súradníc príslušného zobrazenia Z bodu P a jeho normálna výška vedená vo výškovom systéme Bpv,
- $K_i = (X, Y, Z)'$ je vektor 3D karteziánskych súradníc bodu s počiatkom ležiacim v strede referenčného elipsoidu ε_i , kde $i = B, G$,
- $E_i = (B, L, H)'$ je vektor geodetických súradníc bodu definovaných na referenčnom elipsoide ε_i , kde $i = B, G$,
- K°_i, E°_i sú príslušné vektory bodu ležiaceho na povrchu referenčného elipsoidu ε_i , to znamená, že jeho elipsoidická výška je nulová ($H = 0$),
- $T.LK^\circ_i$ je vektor lokálnych 3D karteziánskych súradníc s počiatkom súradníc ležiacim na povrchu elipsoidu ε_i v bode $T.K^\circ_i$,
- $T.K^\circ_i = (X^\circ, Y^\circ, Z^\circ)'$ je vektor karteziánskych súradníc bodu T ležiaceho na povrchu elipsoidu ε_i , platí $T.H=0$,
- $T.E^\circ_i = (B, L, H)'$ je vektor geodetických súradníc bodu T ležiaceho na povrchu elipsoidu ε_i , platí $T.H=0$,
- $T.Lh_i = (n, e, v)'$ lokálny horizontálny súradnicový systém s dotykovým bodom k referenčnému elipsoidu ε_i v ťažisku $T.E^\circ_i$,
- $P.Z_i, P.K_i, P.E_i$ je konvencia pre kvalifikované označenie vektora súradníc bodu P , kde P je prvkom množiny označení bodov $\{P_1, P_2, P_3, \dots, P_n, T\}$, T je ťažisko siete,
- $A(\alpha)$ je rotačná matica, ktorou rotujeme povrch elipsoidu okolo normály o uhol α v pravotočivom smere. Pre trojrozmernú rotačnú maticu platí [6] : $Row(A(\alpha)) = (\cos\alpha, \sin\alpha, 0, -\sin\alpha, \cos\alpha, 0, 0, 0, 1)$,
- $R(T.E^\circ_i)$ je rotačná matica 3D priestoru v bode T s geodetickými súradnicami $T.B, T.L, T.H=0$, potom $Row(R(T.E^\circ_i)) = (-\sin B \cos L, -\sin B \sin L, \cos B, -\sin L, \cos L, 0, \cos B \cos L, \cos B \sin L, \sin B)$, bližšie pozri [6], $Row()$ znamená 3x3 rozmerný riadkový vektor tvorený zoradením riadkov matice R ,
- M je mierka medzi dvoma referenčnými systémami, $M = (1 + m)$, m je mierkový faktor definovaný v transformačnom kľúči.

5. Analýza postupu

Hore uvedený postup obojsmernej transformácie JTSK do ETRS89 má silné a slabé miesta. Z obrázku Obr. 4 je zrejmé, že môžeme vychádzať z jednej základnej axiomy o reálnom svete, a to, že existuje len jedna realita, ale mnoho jej modelov na rôznych úrovniach abstrakcie. Ďalej platí axioma, že z modelov, pri jednej zvolenej úrovni abstrakcie, musí existovať jeden najlepší. Najlepší v tom zmysle, že sa najmenej odchyľuje od skutočnosti. Poznať mieru odchýlenia modelu od skutočnosti je jedna zo základných úloh systému riadenia kvality. To znamená, že najlepší model najlepšie vystihuje danú realitu.

Podľa uvedeného obrázku existuje jeden topografický povrch Zeme (T), ktorý je predmetom geodetického merania, merania a poznávania vôbec. Ďalej existuje len jedna potenciálová plocha, ktorej hovoríme geoid, pri uplatnení Molodenského teórie normálnych výšok budeme mať na mysli kvázigeoid (Q). Ďalšia axióma : Jedna Zem, jeden kvázigeoid. Vzhľadom na veľmi komplexný problém určovania kvázigeoidu ďalej budeme mať na mysli digitálny model kvázigeoidu, resp. po jeho nafitovaní na systém normálnych výšok Bpv budeme hovoriť o digitálnom výškovom referenčnom modeli (DVRM). Bližšie pozri [15], [11], [12], [13], [14], [5]. Pre potreby tohto príspevku ho budeme naďalej označovať symbolom Q.

Majme dva referenčné elipsoidy ε_B a ε_G so stotožnenými normálami vztýčenými v ťažiskách zdrojovej a cieľovej množiny bodov T_B° , T_G° , ktoré sa súčasne dotýkajú povrchmi. Potom vidíme, že bod P topografického povrchu T sa premieta po príslušných normálach do bodov P_B° a P_G° . Označme si rozdiel elipsoidických výšok obrazu bodu P na povrchu elipsoidu B a G $P.e = P_G^\circ.H - P_B^\circ.H$. Túto hodnotu je možné vždy exaktne vypočítať, lebo reprezentuje vzdialenosť elipsoidických plôch meranú po normálach príslušných bodov P_i° . Rozdiel vzdialeností elipsoidických plôch meraných po normálach je menší ako 0,002 mm, a preto môžeme zanedbať, po ktorej norme meriame vzdialenosť elipsoidických plôch. Pre územie Slovenska odľahlosť elipsoidických plôch, po stotožnení normál a dotýkajúcich sa v ťažiskách, dosahuje hodnoty z intervalu $< 0 ; 0,5 >$ metra. Na bodoch ŠPS dosiahlo $e_{max} = 0,463$ m.

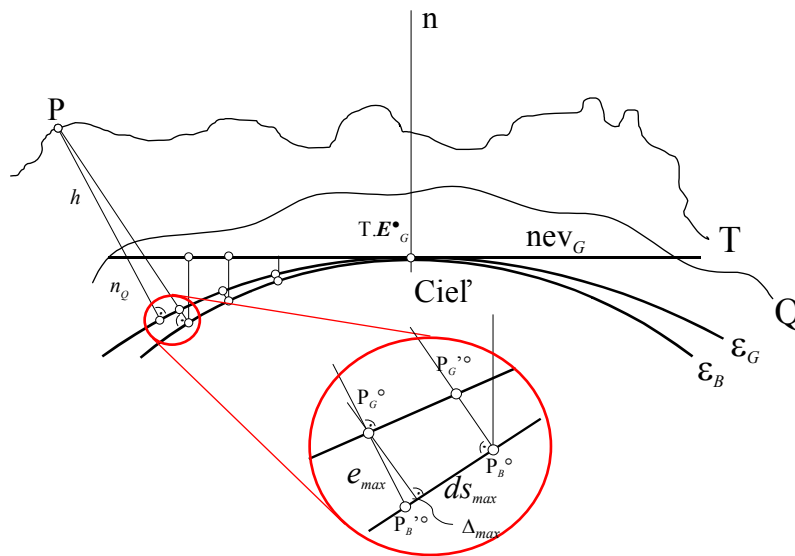
Pre posun bodu v smere spojnice bodov P_G° a ťažiska T_G° označenej ds_{max} hodnoty kolíšu v intervale $< 0 ; 2,7 >$ milimetra. Hodnota ds je funkciou nadmorskej výšky a vzdialenosti bodu od ťažiska. Narastaním vzdialenosti bodu P od ťažiska siete T sa zväčšuje uhol medzi normálami až na maximálnu hodnotu $\delta_{max} = 0,206''$. Hodnota $ds_{max} = 2,7$ mm bola dosiahnutá extrémnym predpokladom, že $h_{max} = 2700$ m a $\delta_{max} = 0,206''$. Rozdiel príslušných dĺžok na elipsoidických plochách $\Delta_{max} = ds_{max,B} - ds_{max,G}$ je menší ako 0,01 mm. Preto tento rozdiel môžeme rovnako zanedbať. Za týchto predpokladov a vzhľadom na skutočnosť, že presnosť určenia bodov ŠPS triedy C je v polohe do 1 cm, môžeme prehlásiť, že sme body cieľového elipsoidu konformne zobrazili na plochu zdrojového elipsoidu. Účinok tohoto rozdielu je navyše zmenšený odhadom mierkového faktoru, ktorý znižuje reziduálnu zložku so súčasným splnením podmienky lokálneho najlepšieho odhadu parametrov transformácie $\mathbf{v}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{v} = \min$. Vzhľadom na tieto skutočnosti môžeme potom jednoznačne vypočítať elipsoidickú výšku H ľubovoľného bodu P územia Slovenska definovanú nad Besselovým referenčným elipsoidom, bez znalosti výšky modelu kvázigeoidu vztiahnutého k lokálnemu elipsoidu, podľa vzťahu :

$$P.H_B = P.h + P.n_Q + P.e$$

Takže, **silné stránky riešenia** sú :

- o jedna Zem, jeden najpresnejší model Zeme T (DMR-Bpv),
- o jedna Zem – jeden najpresnejší model kvázigeoidu Q (DVRM-Bpv),
- o jedna Zem – jeden referenčný geocentrický elipsoid GRS80
- o exaktný výpočet odľahlostí elipsoidických plôch dotýkajúcich sa v ťažiskách zdrojovej a cieľovej množiny identických bodov s totožnými normálami,
- o transformáciami bodov je možné transformovať aj parametre druhého rádu,
- o výhoda uplatnenia aplikačnej schémy ZKKKZ [5],
- o jeden model transformačných parametrov TPM-JTSK,
- o jeden model reziduálnych zložiek DMRZ-Z pre každé zobrazenie Z,

- o publikovaním nových verzií DMR, DVRM, DMRZ, TPM je možné udržať konzistentnosť realizácii záväzných konvenčných referenčných súradnicových a výškových systémov na ETRS89 a EVRS2000.



Obr. 4 Vplyv nepresnosti transformácie súradníc prechodom cez lokálne horizontálne súradnicové systémy stotožnením normál na súradnice bodu P

Slabé stránky riešenia :

- o postupnosť veľkého radu krokov,
- o nie je možné túto metódu uplatniť na rozsahom väčšie oblasti,
- o premietanie bodu z povrchu Zeme po normále k elipsoidu a nie pozdĺž silokrivky normálneho tiažového poľa Zeme,

6. Autorizované transformačné parametre TPM-JTSK, verzia 9.2006

Ďalej uvádzame posledné verzie odhadov GKÚ autorizovaných transformačných parametrov TPM-JTSK pre dva spôsoby transformácie :

A) - na povrchu elipsoidu (geodetická výška $H=0$) a

B) - 3D karteziánskych súradníc (geodetická výška $H \neq 0$ a bola získaná $H = h - n$, pričom h je známa normálna výška bodu a n je generovaná z DVRM-Bpv definovaným nad elipsoidom GRS80). Výsledné parametre získané postupmi A, B sú uvedené v kontextovom tvare. Pozri tabuľky Tab. 1 a Tab. 2.

A – odhad parametrov 4-parametrickej transformácie na povrchu elipsoidu GRS80 počítaný podľa zmiešaného modelu [6, str. 309] :

$$\mathbf{B} * \mathbf{v} + \mathbf{A} * \mathbf{X} + \mathbf{W} = \mathbf{0}, \quad (1)$$

kde postupne znamená :

B je matica parciálnych derivácií matematického modelu podľa observačného vektora vytvárajúca väzbu na vektor rezíduí, **v** je vektor rezíduí, **A** je matica plánu vytvárajúca väzbu transformačných parametrov na vektor realizácií, **X** je vektor transformačných parametrov (tB , tL , m , α , kde α je uhol rotácie okolo normály definujúcej geodetickú výšku H), **W** vektor hodnôt matematických funkcií v bode linearizácie.

<pre> <Transformacia> <OznacenieTransformacie>TRE1E1</OznacenieTransformacie> <KodTransformacie>TrE1E1</KodTransformacie> <PopisTransformacie>Transformácia na povrchu elipsoidu GRS80</PopisTransformacie> <Zdroj> <SuradnicovySystem>S-JTSK</SuradnicovySystem> <Elipsoid>Besselov</Elipsoid> <VstupnySubor>D:\IGS_DATAnew\JTSK03aETRS89\ŠPS2005 definitivna verzia\ZDROJ.XYZ</VstupnySubor> <VahaZdroja>1</VahaZdroja> <Tazisko> <B0>483859,000000</B0> <L0>192447,000000</L0> <H0>0,000</H0> </Tazisko> </Zdroj> <Ciel> <SuradnicovySystem>ETRS89</SuradnicovySystem> <Elipsoid>GRS80</Elipsoid> <VstupnySubor>D:\IGS_DATAnew\JTSK03aETRS89\ŠPS2005 definitivna verzia\SCIEL.XYZ</VstupnySubor> <VahaCiela>1000</VahaCiela> <Tazisko> <B0>483858,000000</B0> <L0>192441,000000</L0> <H0>0,000</H0> </Tazisko> </Ciel> <TransformacneParametre> <DatumOdhaduParametrov>25.08.2006 </DatumOdhaduParametrov> <CasOdhaduParametrov>22:19:48 </CasOdhaduParametrov> <PocetParametrov>4</PocetParametrov> <MaskaTransformacie>1111</MaskaTransformacie> <TaziskoZdroja> <B0>483859,000000</B0> <L0>192447,000000</L0> <H0>0,000</H0> </TaziskoZdroja> <Translacia> <tB>-1,559717</tB> <tL>-5,902330</tL> </Translacia> <Rotacia> <uH>-13,327900</uH> </Rotacia> <MierkovyFaktor> <dK>5,847230</dK> </MierkovyFaktor> </TransformacneParametre> <GlobalnaKovariancnaMaticaTransformacnychParametrov> <SmerodajnaOdchylka>330,91</SmerodajnaOdchylka> <Jednotky>mm</Jednotky> <RozmerGKM>4</RozmerGKM> <TvarUlozeniaGKM>HT</TvarUlozeniaGKM> <OddelovacPoloziek>#</OddelovacPoloziek> <DataMatice> 0,001463493018768#-1,80317349040787E-07#-1,17532296979692E-03#-3,27462541887976E-04# 1,46359565234765E-03#-2,65347010797656E-04#6,47178806032084E-04# 1,90436521568773#-0,340794060949726# 3,38029051044214# </DataMatice> </GlobalnaKovariancnaMaticaTransformacnychParametrov> </Transformacia> </pre>

Tab. 1 Transformačné parametre MBM 4 parametrickej transformácie na povrchu elipsoidu medzi JTSK a ETRS89

B - Transformáciu bodu 3D karteziánskych súradníc zdrojového systému JTSK do cieľového systému ETRS89 vypočítame podľa 7-parametrickej transformácie MBM [6] :

$$\mathbf{X} = \mathbf{T}_{\text{MBM}} + \mathbf{U}_0 + M^* \mathbf{R} (\mathbf{U} - \mathbf{U}_0) . \quad (2)$$

Inverznú transformáciu vypočítame podľa vzťahu :

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_0 + M^{-1} * \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{X} - (\mathbf{T}_{\text{MBM}} + \mathbf{U}_0) , \quad (3)$$

kde postupne pre jeden bod P znamená :

$\mathbf{X} = P.X_i$ vektor karteziánskych geocentrických súradníc cieľového systému S_i ,
 $\mathbf{U} = P.X_j$ vektor karteziánskych geocentrických súradníc zdrojového systému S_j ,
 $\mathbf{U}_0 = T.X_j$ vektor karteziánskych geocentrických súradníc ťažiska zdrojového systému S_j ,

$\mathbf{T}_{\text{MBM}} = (tX, tY, tZ)'$ vektor translačných parametrov,

$M = (1 + m)$ je mierka a m je mierkový faktor,

$\mathbf{R} = \mathbf{R}_3(uX) * \mathbf{R}_2(uY) * \mathbf{R}_1(uZ)$ je rotačná matica zložená zo súčinu rotačných matic, z ktorých každá otáča karteziánsky 3D systém okolo osi : \mathbf{R}_3 okolo osi X o uhol uX , \mathbf{R}_2 okolo osi Y o uhol uY a \mathbf{R}_1 okolo osi Z o uhol uZ .

Transformáciu bodu zdrojového systému do cieľového systému vypočítame podľa Burša-Wolfovho modelu podľa [6] :

$$\mathbf{X} = \mathbf{T}_{\text{BWM}} + M^* \mathbf{R} \mathbf{U} . \quad (4)$$

Inverznú transformáciu vypočítame podľa vzťahu :

$$\mathbf{U} = M^{-1} * \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{X} - \mathbf{T}_{\text{BWM}}) , \quad (5)$$

kde postupne pre jeden bod P znamená :

$\mathbf{X} = P.X_i$ vektor 3D karteziánskych geocentrických súradníc cieľového systému S_i ,
 $\mathbf{U} = P.X_j$ vektor 3D karteziánskych geocentrických súradníc zdrojového systému S_j ,
 $\mathbf{T}_{\text{BWM}} = (tX, tY, tZ)'$ vektor translačných parametrov reprezentujúcich posun počiatku zdrojového systému S_j v cieľovom systéme S_i ,

$M = (1 + m)$ je mierka a m je mierkový faktor,

$\mathbf{R} = \mathbf{R}_3(uX) \mathbf{R}_2(uY) \mathbf{R}_1(uZ)$ je rotačná matica zložená zo súčinu rotačných matic, z ktorých každá pootáča karteziánsky 3D systém okolo osi : \mathbf{R}_3 okolo osi X o uhol uX , \mathbf{R}_2 okolo osi Y o uhol uY a \mathbf{R}_1 okolo osi Z o uhol uZ .

Pre úplnosť uvádzame vzťah medzi translačnými parametrami počítanými podľa Molodenskij – Badekasovho modelu MBM a BWM [6]. Porovnaním rovníc (2) a (4) dostaneme :

$$\mathbf{T}_{\text{BWM}} + M^* \mathbf{R} \mathbf{U} = \mathbf{T}_{\text{MBM}} + \mathbf{U}_0 + M^* \mathbf{R} (\mathbf{U} - \mathbf{U}_0) . \quad (6)$$

Z toho ľahko odvodíme vzťah pre translačné parametre \mathbf{T}_{BWM} :

$$\mathbf{T}_{\text{BWM}} = \mathbf{T}_{\text{MBM}} + \mathbf{U}_0 - M^* \mathbf{R} \mathbf{U}_0 . \quad (7)$$

Pre mierkový faktor m a rotačné uhly uX, uY, uZ v MBM a BWM platí ekvivalencia [6].

```

<Transformacia>
  <OznacenieTransformacie>TRK1K2</OznacenieTransformacie>
  <KodTransformacie>TrK1K2</KodTransformacie>
  <PopisTransformacie>Transformácia medzi dvomi 3D karteziánskymi sústavami Ki, Kj cez MOLODENSKÉHO-BADEKASOV
model</PopisTransformacie>
  <Zdroj>
    <SuradnicovySystem>S-JTSK/03</SuradnicovySystem>
    <Elipsoid>Besselov</Elipsoid>
    <VstupnySubor>D:\IGS_DATnew\JTSK03aETRS89\ŠPS2005 definitivna verzia\ZDROJ.XYZ</VstupnySubor>
    <VahaZdroja>1</VahaZdroja>
    <Tazisko>
      <X0>3981106,000</X0>
      <Y0>1396252,000</Y0>
      <Z0>4765633,000</Z0>
    </Tazisko>
  </Zdroj>
  <Ciel>
    <SuradnicovySystem>ETRS89</SuradnicovySystem>
    <Elipsoid>GRS80</Elipsoid>
    <VstupnySubor>D:\IGS_DATnew\JTSK03aETRS89\ŠPS2005 definitivna verzia\CIEL.XYZ</VstupnySubor>
    <VahaCiela>1</VahaCiela>
    <Tazisko>
      <X0>3981665,000</X0>
      <Y0>1396321,000</Y0>
      <Z0>4766084,000</Z0>
    </Tazisko>
  </Ciel>
  <TransformacneParametre>
    <DatumOdhaduParametrov>03.10.2006 </DatumOdhaduParametrov>
    <CasOdhaduParametrov>4:07:29 </CasOdhaduParametrov>
    <PocetParametrov>7</PocetParametrov>
    <MaskaTransformacie>111111</MaskaTransformacie>
    <TaziskoZdroja>
      <X0>3981106,000</X0>
      <Y0>1396252,000</Y0>
      <Z0>4765633,000</Z0>
      <B0>484022,781816</B0>
      <L0>191936,371125</L0>
      <H0>-673,808</H0>
    </TaziskoZdroja>
    <Translacia>
      <tX>558,823</tX>
      <tY>68,740</tY>
      <tZ>451,626</tZ>
    </Translacia>
    <TranslaciaBursovWolfovModel>
      <tX>485,021</tX>
      <tY>169,465</tY>
      <tZ>483,839</tZ>
    </TranslaciaBursovWolfovModel>
    <Rotacia>
      <uX>-7,786342</uX>
      <uY>-4,397554</uY>
      <uZ>-4,102655</uZ>
    </Rotacia>
    <MierkovyFaktor>
      <dK>-0,008099</dK>
    </MierkovyFaktor>
  </TransformacneParametre>
  <GlobalnaKovariancnaMaticaTransformacnychParametrov>
    <SmerodajnaOdchylka>0,34</SmerodajnaOdchylka>
    <Jednotky>mm</Jednotky>
    <RozmerGKM>7</RozmerGKM>
    <TvarUlozeniaGKM>HT</TvarUlozeniaGKM>
    <OddelovacPoloziek>#</OddelovacPoloziek>
    <DataMatice>
1,12485830997772E-03#9,63721322660156E-10#-4,63073730996825E-09#-3,39257852991119E-14#8,89489644144458E-14#-
1,87279424952548E-13#-2,90338519968013E-14#
1,12485868447019E-03#3,11452046658505E-09#-2,15370594255917E-15#5,7413578412862E-14#-5,47029696496262E-
14#2,48939482343348E-14#
1,12485839466518E-03#2,71959219868119E-14#1,15506171476473E-13#-2,37954197375871E-13#-3,42470727267479E-14#
7,73120966434356E-14#-2,45083462120007E-29#4,17180113413822E-29#1,49077486782383E-30#
2,22861372733896E-13#-2,49075785292716E-13#-4,78168831297014E-14#
5,26454357816684E-13#7,50093143380567E-14#

```

```
9,50616938972091E-14#
</DataMatice>
</GlobalnaKovariancnaMaticaTransformacnychParametrov>
</Transformacia>
```

Tab. 2 Transformačné parametre MBM a BWM 7 parametrickej transformácie 3D karteziánskych súradnicových systémov JTSK do ETRS89

Poznámka k rozdielu mierkových faktorov m dosiahnutých transformáciou na povrchu elipsoidu a transformáciou 3D priestorových štruktúr karteziánskych súradníc : Rozdiel mierkových faktorov odhadnutých hore uvedenými postupmi je 8mm/1000km. Maximálna vzdialenosť bodu ŠPS od ťažiska bola 234 km. Po prepočte mierkového faktoru na maximálnu vzdialenosť bodov ŠPS, čo je približne 468 km, dostaneme rozdiel 3,7 mm. Rozdiel je menší ako spomínaná hodnota $2x2,7\text{ mm}$, ktorú spôsobuje metóda prevodu bodov z elipsoidu na elipsoid stotožnením normál v ťažiskách. Hore uvedený fakt potvrdzuje predpoklad, že realizácia JTSK/03 na Besselovom elipsoide spolu s normálnymi výškami h systému Bpv a výškou kvázigeoidu n_Q nám generuje 3D priestorovú štruktúru konzistentnú s priestorovou 3D štruktúrou získanou využitím GNSS.

7. Záver

V príspevku prezentovaný výpočet spresnenej realizácie systému S-JTSK, pracovne označovaný JTSK/03, 7 transformačných parametrov Burša-Wolfovho modelu TPM-JTSK, vytvárajúcich jednoznačný vzťah medzi realizáciami súradníc systémov S-JTSK a ETRS89, digitálne modely reziduálnych zložiek DMRZ-JTSK a digitálny výškový referenčný model DVRM-Bpv sú nevyhnutnými nástrojmi využitia služieb SKPOS vo vybraných geodetických činnostiach v doteraz stále záväznom súradnicovom systéme S-JTSK. Inými slovami, sú nástrojmi na prechod od vyše 60 rokov stále platnej, avšak mierkovo nehomogénne zdeformovanej realizácie do realizácie mierkovo stabilnej, aj keď ešte stále zaťaženej zbytkovými deformáciami, ktoré v súčasnosti bez ďalšieho merania nie je v našich silách eliminovať.

8. Literatúra:

- [1] KLOBUŠIAK, M.: Reverzibilný vzťah realizácií dvoch projekčných systémov S-JTSK a ETRS 89. In: Zborník referátov „Medzinárodná konferencia Geodetické siete 2001“, pobočka SSGK pri GKÚ, Podbanské 2001, s. 67-75.
- [2] KLOBUŠIAK, M. : Dynamický stochastický etalón. In: Zborník referátov "Metrológia v geodézii", SvF STU, Katedra geodetických základov, Bratislava 2001, s. 75-84.
- [3] KLOBUŠIAK, M. – LEITMANNOVÁ, K.: Slovenská permanentná GNSS služba na prevádzkovanie slovenského observačného systému - nové geodetické priestorové základy. In: Zborník referátov „Geodetické referenčné systémy“, KGZ SvF STU, Bratislava 2002, s. 23-38.
- [4] KLOBUŠIAK, M.: DTplus – Programový systém na deterministické prevody a transformácie geodetických bodov a GIS objektov. Verzia 9.2006. MaKlo, nepublikované. © 1995-2006.
- [5] KLOBUŠIAK, M. – LEITMANNOVÁ, K. – FERIANEC, D. : Realizácia záväzných transformácií národných referenčných súradnicových a výškového Systému do Európskeho Terestrického Referenčného Systému 1989. In: CD Zborník referátov

"Geodetické siete a priestorové informácie", SSGK, GKÚ Bratislava, TOPÚ Banská Bystrica, Podbánske 24.-26. október 2005.

- [6] LEICK, A.: GPS Satellite Surveying. New York, Chichester, Toronto, Brisbane, Singapore, John Wiley & Sons, 1990. 352 p., ISBN 0-471-81990-5.
- [7] LEITMANNOVÁ, K.: – Určenie súradníc vybraných bodov ZBP v systéme ETRS89 a S-JTSK s využitím národného referenčného rámca ŠPS 99 (Meranie GPS v roku 1999). Technická správa 2000-2001.
- [8] LEITMANNOVÁ, K.- KLOBUŠIAK, M. – PRIAM, Š. - FERIANC, D.: SKTRF 2001 – referenčný rámec pre Štátnu priestorovú sieť. In: In: Zborník referátov „Geodetické referenčné systémy“, KGZ SvF STU, Bratislava 2002, s. 137- 148.
- [9] LEITMANNOVÁ, K.- HAVLÍKOVÁ, M. : – Výpočet SKTRF 2003. Technická správa 2003-2004. (nepublikované)
- [10] LEITMANNOVÁ, K.- KLOBUŠIAK, M. – FERIANC, D. : Realizácia SKTRF 2005. In: CD zborník referátov „Geodetické siete a priestorové informácie“, SSGK pri GKÚ a TOPU BB, 24.-26. 10. 2005.
- [11] MOJZEŠ, M.: Transformácia gravimetrického kvázigeoidu. Technická správa, apríl – október 1996.
- [12] MOJZEŠ, M.: Spresnenie gravimetrického kvázigeoidu Slovenska (GMSQ98BF). Vedecko – technický projekt „ Geodetická integrovaná sieť“, etapa 4f, VÚGK, 1998.
- [13] MOJZEŠ, M.: Spresnenie gravimetrického kvázigeoidu Slovenska (Návrh ciest na jeho ďalšie spresňovanie). Vedecko – technický projekt „ Geodetická integrovaná sieť“, etapa 4e. VÚGK, 1999.
- [14] MOJZEŠ, M. – JANÁK, J. – PAPČO, J.: Určenie gravimetrického kvázigeoidu SR, verzia 2003 s použitím vyšších členov v rozvoji poruchového potenciálu. Vedecko – technický projekt „ Integrovaná geodetická sieť“, čiastková úloha č.1 „Rozvoj integrovaných geodetických základov Slovenska“. VÚGK, 2003.
- [15] PECÁR, J. – GRAND, T.: Prvý kvázigeoid pre územie Slovenska. In: Zborník referátov „Modernizácia geodetických základov Slovenska“, SSGK pri VÚGK Bratislava, 30.3.1994, s.169-177.